ЛЕКЦИЯ № 26

Адиабатические инварианты.

> Значение адиабатической гипотезы в квантовой теории исключительно велико, поскольку она ведет к разъяснению и развитию формальных принципов определения стационарных состояний.
>
> Н.Бор

Лекция начинается с этой фразы Н.Бора, поскольку адиабатические инварианты сыграли важную роль в развитии квантовой механики. В предыдущих лекциях в некоторых местах указывалась связь классической и квантовой механик, которая особенно проявляется в гамильтоновом подходе (гамильтоновы уравнения, скобки Пуассона вообще и фундаментальные скобки Пуассона). Адиабатические инварианты дают еще одну такую связь, хотя само понятие адиабатических инвариантов возникло в теории термодинамических систем. В 1866 г. Людвиг Больцман, пытаясь соотнести законы термодинамики и механики, показал, что при периодическом движении системы с частотой ω, отношение средней кинетической энергии к частоте $\langle K \rangle / \omega$ остается примерно постоянным при медленном изменении со временем параметров, входящих в систему. Это соотношение, которое можно записать в интегральном виде:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^T 2K dt, \tag{26.1}$$

где $T = 2\pi/\omega$ - период периодического процесса, было названо Полем Эренфестом ***адиабатическим инвариантом***, поскольку, согласно Больцману, эта величина остается постоянной, если изменение параметров не сопровождается поглощением или выделением тепла, т.е. происходит адиабатически.

Для газа невзаимодействующих частиц выражение (26.1) можно переписать в виде

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^T 2K dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^T m_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^T p_i \frac{dq_i}{dt} dt = \frac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i \,. \tag{26.2}$$

В простом случае одной степени свободы адиабатический инвариант имеет вид

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p dq = \frac{1}{2\pi}\int\limits_s dp dq\,, \qquad (26.3)$$

где интегрирование производится по площади в фазовом пространстве, ограниченной замкнутой фазовой траекторий. Сохранение этой величины при медленном изменении параметров системы можно доказать для любых механических *гамильтоновых систем*.

Эренфест сформулировал ***адиабатическую гипотезу***, согласно которой при переходе от классического к квантовому рассмотрению адиабатические инварианты должны принимать дискретные значения, соответствующие правилам квантования квантовой механики («квантуются адиабатические инварианты»).

Перед доказательством сохранения адиабатических инвариантов, рассмотрим простой пример гармонического осциллятора и два сценария изменения его параметра – частоты. В первом случае в момент времени $t = 0$ частота скачком меняется от значения ω_- до значения ω_+, а во втором – медленно меняется за большое время, много большее периода осцилляций.

В первом случае при $t < 0$ энергия и решение выглядят так:

$$E_- = p^2/2m + m\omega_-^2 x^2/2\,, \qquad x = a_- \cos(\omega_- t + \alpha) = \sqrt{2E_-/m\omega_-^2}\cos(\omega_- t + \alpha)\,. \qquad (26.4)$$

Траектория движения на фазовой плоскости изображена красной линией на Рис.26.1а. Размеры эллипса траектории равны $p_{\max} = \sqrt{2mE_-}$ и $x_{\max} = \sqrt{2E_-/m\omega_-^2}$. Поэтому, вычисленный по формуле (26.3) адиабатический инвариант, который представляет собой площадь фазового пространства внутри эллипса, равен

$$I_- = \frac{1}{2\pi}\oint p dx = \frac{1}{2} p_{\max} x_{\max} = \frac{E_-}{\omega_-}\,. \qquad (26.5)$$

Траектория после изменения частоты зависит от фазы осцилляций до этого момента. Для определенности положим $\alpha = 0$. При этом, в момент $t = 0$ имеем: $x = \sqrt{2E_-/m\omega_-^2}$ и $p = 0$. Поэтому при $t > 0$ энергия и решение имеют вид

$$E_+ = p^2/2m + m\omega_+^2 x^2/2\,, \qquad x = a_+ \cos(\omega_+ t) = \sqrt{2E_-/m\omega_-^2}\cos(\omega_+ t)\,. \qquad (26.6)$$

Из условия непрерывности смещения в момент изменения частоты находим: $p_{\max} = \sqrt{2mE_-}(\omega_+ / \omega_-)$ и $x_{\max} = \sqrt{2E_- / m\omega_-^2}$ (синий эллипс на Рис.26.1а). Для определенности считаем, что $\omega_+ > \omega_-$. При этом энергия меняется, $E_+ / E_- = (\omega_+ / \omega_-)^2$ и адиабатический инвариант не сохраняется:

$$I_+ = \frac{E_+}{\omega_+} = I_- \frac{\omega_+}{\omega_-}. \tag{26.7}$$

В случае медленного (адиабатического) изменения частоты от ω_- при $t = -\infty$ до ω_+ при $t = +\infty$, согласно теореме Больцмана -Эренфеста, адиабатический инвариант сохраняется: $I_+ = I_-$. Поскольку решение при $t > 0$ принимает вид $x = b\cos(\omega_+ t)$, то из параметров орбиты находим, что $I_+ = E_+ / \omega_+ = E_- / \omega_-$. Таким образом, параметры возникающей орбиты такие: $x^+_{\max} = x^-_{\max}\sqrt{\omega_- / \omega_+}$ и $p^+_{\max} = p^-_{\max}\sqrt{\omega_+ / \omega_-}$, Эти орбиты изображены на Рис.26.1б.

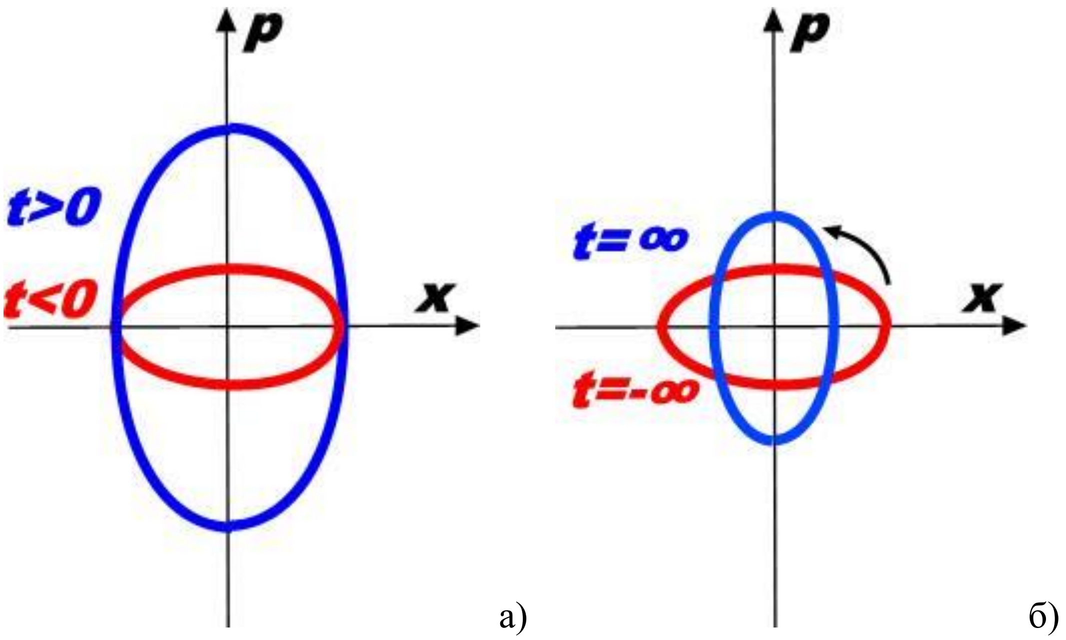

Рис.26.1

В этом примере мы видим, что если параметр системы $\omega = \omega(t)$ медленно зависит от времени, то и энергия медленно зависит от времени $E = E(t)$, но их комбинация может от времени не зависит. Она и представляет собой адиабатический инвариант. Докажем его инвариантность при медленном изменении параметра

Доказательство сохранения адиабатического инварианта.

Рассмотрим гамильтонову систему, допускающую периодическое движение с периодом $T = 2\pi / \omega$ и с параметром $\lambda(t)$, медленно зависящим от времени. Т.е. изменение параметра за период T много меньше самой величины параметра: $d\lambda / dt << \lambda / T$. При этом энергия системы E также становится функцией времени. Поскольку изменение гамильтониана определяется только явной зависимостью от времени (не через координаты и импульсы, а через параметр λ), то

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}. \tag{26.8}$$

Усредним это равенство по периоду движения T. Здесь делается главное приближение: мы берем время между моментами, в которые фаза движения одинакова, но за это время частота (и период) слегка меняются. Т.е. зависимости $q(t)$ и $p(t)$ берутся при фиксированном значении λ. В этом приближении $\dot{\lambda}$ выносится из операции усреднения:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \right\rangle \approx \frac{d\lambda}{dt}\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle. \tag{26.9}$$

Здесь операция усреднения означает $\langle A \rangle = (1/T)\int_0^T A dt$. Т.е.

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx \frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt. \tag{26.10}$$

Поскольку из уравнения Гамильтона $dq/dt = \partial H/\partial p$ следует $dt = dq/(\partial H/\partial p)$, то (26.10) можно переписать в виде

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx \frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{(\partial H/\partial \lambda)}{(\partial H/\partial p)}dp}{\oint \frac{1}{(\partial H/\partial p)}dp}. \tag{26.11}$$

(Мы учли, что $T = \int_0^T dt = \oint dq/(\partial H/\partial p)$ и интеграл по периоду заменяется интегралом по координате по замкнутому контуру, соответствующему постоянному значению λ). Дальше воспользуемся соотношением

$$\frac{(\partial H/\partial \lambda)}{(\partial H/\partial p)} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \tag{26.12}$$

которое на первый взгляд выглядит странно из-за знака в правой части. Дело в том, что при движении по траектории энергия E сохраняется, и импульс можно представить как функцию координаты, энергии и параметра λ: $p = p(q, E, \lambda)$. Поэтому гамильтониан на этой траектории зависит от параметра непосредственно и через импульс: $H(p(q,E,\lambda), q, \lambda) = E$. Дифференцируя это равенство по λ, получаем соотношение (26.12). Рассмотрим для примера гармонический осциллятор с гамильтонианом $H = p^2/2 + \lambda^2 q^2/2$. Для него $\partial H/\partial p = p$, $\partial H/\partial\lambda = \lambda q^2$ и $(\partial H/\partial\lambda)/(\partial H/\partial p) = \lambda q^2/p$. С другой стороны, из соотношения $E = p^2/2 + \lambda^2 q^2/2$ следует, что $p = \sqrt{2E - \lambda^2 q^2}$. Отсюда $\partial p/\partial\lambda = -\lambda q^2/p$, что соответствует (26.12).

Подставляя (26.11) в (26.10), получаем

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial p/\partial\lambda) dp}{\oint \frac{1}{(\partial H/\partial p)} dp}, \tag{26.13}$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \left\langle \frac{\partial E}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial p}{\partial\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0. \tag{26.14}$$

Это равенство можно окончательно переписать в виде

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = 0, \tag{26.15}$$

где адиабатический инвариант I определяется выражением (26.3). Таким образом, адиабатический интеграл, действительно, является приближенным интегралом движения.

О степени сохранения адиабатического инварианта можно судить по рассмотренной в лекции №10 задаче о движении гамонического осциллятора под действием внешней силы, медленно включаемой и потом так же адиабатически выключаемой. В данном случае параметром системы является амплитуда внешней силы. В рассмотренной задаче сила выбиралась в виде $F = F_0/\left(1 + (t/\tau)^2\right)$ и адиабатичность ее изменения определялась малым параметром $1/(\omega_0\tau) \ll 1$. Как было показано, асимптотически амплитуда колебаний стремилась к величине $\sim \exp(-\omega_0\tau/2\pi)$. Таким образом, изменение адиабатического инварианта имеет экспоненциально малую величину $\Delta I \sim \exp(-\omega_0\tau/\pi)$.

Отметим важное свойство адиабатического интеграла. Поскольку он является функцией энергии $I = I(E, \lambda)$, то найдем производную от него по энергии:

$$\frac{\partial I}{\partial E}=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{dq}{\partial H/\partial p}=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{dq}{dq/dt}=\frac{1}{2\pi}\oint dt=\frac{T}{2\pi}=\frac{1}{\omega}. \qquad (26.16)$$

Этому соотношению при постоянстве параметров можно придать и другой вид:

$$\omega=\frac{dE}{dI}. \qquad (26.17)$$

Связь с квантовой теорией видна, если домножить эту формулу на константу Планка (с размерностью действия) и ввести безразмерную величину $N=I/\hbar$, то формула (26.17) принимает форму:

$$\hbar\omega=\frac{dE}{dN}, \qquad (26.18)$$

где N имеет смысл числа квантовых возбуждений с энергиями, меньшими E, а $\hbar\omega$ – энергии одного кванта. При этом (26.18) описывает изменение энергии системы при добавлении одного кванта.

Хотя величину (26.3) адиабатического инварианта I мы ввели в связи с рассмотрением медленно меняющихся параметров, но он имеет смысл и в задачах с постоянными параметрами, в которых эта ведичина является точным интегралом движения.

Соотношение (26.17) важно и в другом приложении, связанным с так называемыми *переменными «действие-угол»*.

Переменные «действие-угол».

Рассмотрим еще одно представление адиабатического инварианта. В лекции №25 было показано, что импульс, входящий в выражение для него, может быть представлен в виде $p=\partial S/\partial q$. В консервативной системе с сохраняющейся энергией действие имеет вид $S(q,t)=-Et+S_0(q,E)$, где S_0 – укороченное действие. Таким образом, в консервативных системах $p=\partial S_0(q,E)/\partial q$ и адиабатический инвариант принимает форму $I=(1/2\pi)\oint(\partial S_0/\partial q)dq$, т.е. он равен изменению укороченного действия при обходе по замкнутой фазовой траектории. Поскольку в консервативной системе есть однозначное соответствие между энергией E и адиабатическим инвариантом I, то можно укороченное действие представить в виде $S_0=S_0(q,I)$. Оказалось удобным перейти в системе с периодическим движением от гамильтоновых пременных (p,q) к новым переменных, в которых роль нового импульса будет играть адиабатический инвариант, а в качестве производящей функции выбрать укороченное действие, зависящее от старых координат и новых импульсов. Она играет роль производящей функции Φ в лекции №22 (см. (22.17)). Тогда эти формулы, связывающие новые и старые переменные, будут выглядеть так:

$$p = \frac{\partial S_0(q,I)}{\partial q}, \qquad \varphi = \frac{\partial S_0(q,I)}{\partial I}, \qquad H' = H(I) = E(I), \tag{26.19}$$

где φ – новая обобщенная координата. Заметим, что новый гамильтониан в новых переменных зависит только от нового импульса, но не от новой координаты. Новые канонические переменные (I,φ) называются «*переменными действие-угол*». (Во избежание недоразумения отметим, что устоявшийся термин «переменная действие» не отличается от истинного действия, которое обсуждалось в предыдущих лекциях). Поскольку мы совершили каноническое преобразование, то новая система является гамильтоновой, и выполняются уравнения Гамильтона:

$$\dot{I} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\partial E}{\partial I}. \tag{26.20}$$

Учитывая соотношение (26.16) второе уравнение сводится к простому решению:

$$\varphi = \omega t. \tag{26.21}$$

Таким образом, траектория движения изображающей точки в новом фазовом пространстве принимает совершенно простой вид (см. Рис.26.2). При этом она движется вдоль оси φ с постоянной скоростью.

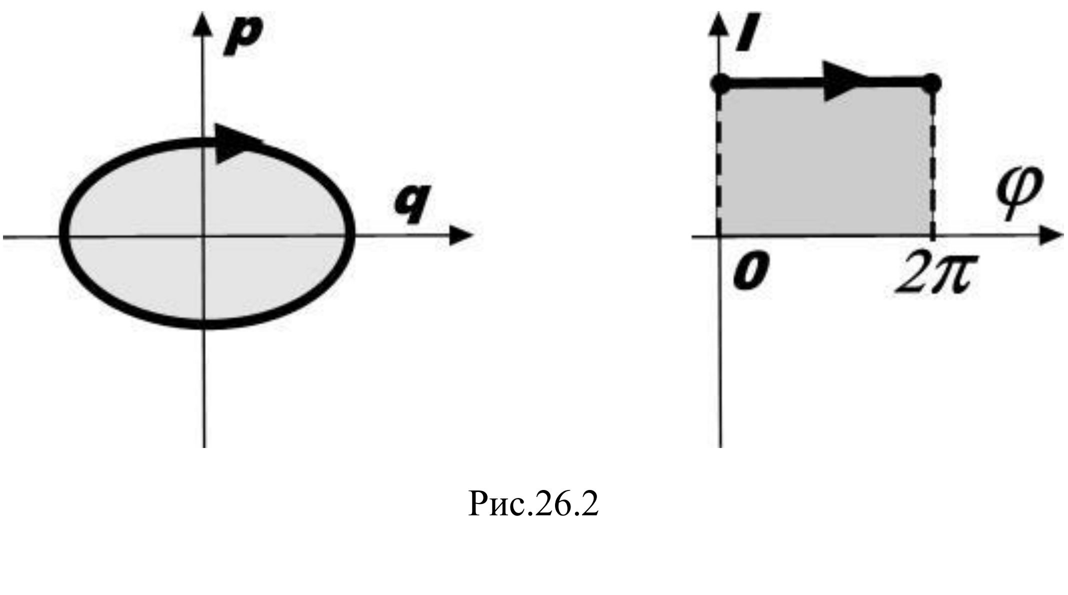

Рис.26.2